令和２年度

正解・解答例

高等学校【数　学】解答用紙

（その１）

1　(1) 各2点×2　(2) 各2点×2　(3) 各3点×4

(1) / (2)

(i)	公の性質	(ii)	イ	(i)	オ	(ii)	ウ

(3)

(i)	技能	(ii)	数学的	(iii)	数学のよさ
(iv)	活用する態度				

1　20点

2　各8点×5

(1)	511	(2)	$\frac{12\sqrt{5}}{5}$	(3)	$-\frac{5}{6}\pi,\ \frac{\pi}{2}$
(4)	$1 \leqq x < 5$	(5)	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$		

2　40点

3　各15点×2

(1)

(i)　$a>0$ のとき　$x > \frac{b}{a}$

(ii)　$a=0,\ b<0$ のとき　解は全ての実数

(iii)　$a=0,\ b\geqq 0$ のとき　解なし

(iv)　$a<0$ のとき　$x < \frac{b}{a}$　（答）

(2)

(i)　初項 $x=0$ のとき、

この無限等比級数は 0に収束

(ii)　$x\neq 0$ のとき

この無限等比級数が収束する条件は、$|公比|<1$

よって　$\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$

$\iff \frac{1}{|1+x|} < 1$

$\iff |1+x| > 1$

$\iff 1+x<-1,\ 1<1+x$

$\iff x<-2,\ 0<x$

以上(i)(ii)より

この無限等比級数が収束する実数 x の値の範囲は

$x<-2,\ 0\leqq x$　（答）

3　30点

受験番号		得点 その１	90点

令和２年度

正解・解答例

高等学校【数　学】解答用紙

（その２）

4　[1] (1) 14点, (2) 6点, (3) 6点, (4) 8点　[2] 16点,

[１]

(1)

$\angle ABC=\theta$ とおくと，$\angle CDA=180^\circ-\theta$ とおける。

$\triangle ABC$ および $\triangle CDA$ に余弦定理を用いると

$$AC^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cos\theta$$
$$=41-40\cos\theta \quad —①$$

$$AC^2=4^2+1^2-2\cdot4\cdot1\cdot\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=17+8\cos\theta \quad —②$$

①,②より

$$41-40\cos\theta=17+8\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

このとき①より

$$AC^2=41-40\cdot\frac{1}{2}=21$$

$AC>0$ より　$AC=\sqrt{21}$　(答)

(2)

$\triangle ABC$ に正弦定理を用いると

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{4}{\sin\angle BAC}$$

(1)より $\angle ABC=60^\circ$ より

$$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{7}}{7}\ (答)$$

(3)

点Bから直線ACへ下ろした垂線と，ACとの交点をHとすると，

$\sin\angle BAC=\dfrac{BH}{AB}$　だから

$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{BH}{5}$　　$\therefore\ BH=\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$　(答)

(4)

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin60^\circ=5\sqrt{3}$$

また

$S=\dfrac{1}{2}r(AB+BC+CA)$ より

$$=\frac{1}{2}r(5+4+\sqrt{21})$$
$$=\frac{1}{2}r(9+\sqrt{21})$$

これより

$$5\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(9+\sqrt{21})$$

$$r=\frac{10\sqrt{3}}{9+\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\quad(答)$$

[２]

$\triangle ABC$ において

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$$
$$=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$$
$$=3^2-2\cdot10+6^2=25$$

$|\overrightarrow{BC}|\geqq0$ より　$|\overrightarrow{BC}|=5$

直線AIと直線BCとの交点をMとする

直線AMは，$\angle BAC$ の二等分線だから，

$BM:MC=AB:AC=2:1$

これより　$BM=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{10}{3}$

また，直線BIは，$\angle ABC$ の二等分線だから

$$AI:IM=BA:BM=6:\frac{10}{3}$$
$$=9:5$$

これより　$AI=\dfrac{9}{14}AM$

よって　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{9}{14}\overrightarrow{AM}=\dfrac{9}{14}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2+1}$

$$\therefore\ \overrightarrow{AI}=\frac{3\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{14}\quad(答)$$

4
50点,

受験番号		得点 その２	50点,

令和２年度

正解・解答例

高等学校【数　学】解答用紙

（その３）

5　(1) 10点 (2) 15点 (3) 10点 (4) 15点

(1)

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+1=n^2+1$　(答)

(2)

第k群の総和は

$\sum_{j=1}^{2k-1}(2j-1)=2\cdot\frac{1}{2}(2k-1)\cdot 2k-(2k-1)$

$=4k^2-4k+1$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$　(答)

(3)

$\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)>2019$

$n(2n-1)(2n+1)>6057$

$n=11$のとき　(左辺)$=5313$

$n=12$のとき　(左辺)$=6900$

∴ 求めるnは

$n=12$　(答)

(4)　lを自然数とする

$31=2l-1$を解いて　$l=16$

∴ 31は 16番目の奇数

自然数tについて　$2t-1>16$を解くと

$t>\frac{17}{2}$　∴ $t\geqq 9$

∴ 31は第9群で初めて現れるので，

m回目の31は$(m+8)$群の31である

この数列の初項から第$(m+7)$群の最後の項までの項数は

$(m+7)^2=m^2+14m+49$

よって 求める項数は

$m^2+14m+49+16$

$=m^2+14m+65$　(答)

5
50点

受験番号		得点 その３	50点

令和２年度

高等学校【数　学】解答用紙

正解・解答例

（その４）

6　(1) 8点　(2) 20点　(3) 14点　(4) 18点

(1)

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$\therefore f'(-1)=-\frac{1}{2}$ より，求める接線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}\{x-(-1)\}$$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$　（答）

(2)

(1)より $f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ のとき $-x^2+2x+1=0$ より

$x=1\pm\sqrt{2}$

関数 $f(x)$ の増減表は以下のとおり

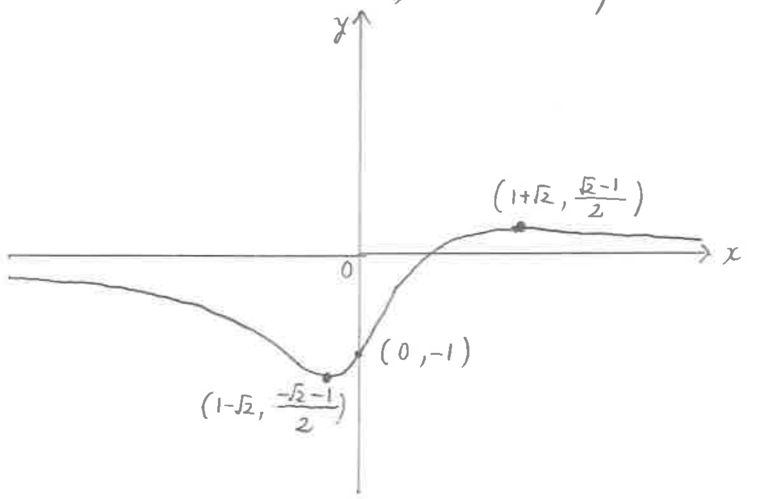
x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	↘

$x=1-\sqrt{2}$ のとき 極小値 $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$

$x=1+\sqrt{2}$ のとき 極大値 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

また，$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$ より x軸は漸近線

よって $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のとおり



(3)

直線 l の方程式は $y+1=k(x+1)$　$\therefore y=kx+k-1$

条件を満たすとき

方程式 $\frac{x-1}{x^2+1}-(kx+k-1)=0$ は異なる3つの実数解をもつ

左辺を変形すると

$$\frac{-(x+1)(kx^2-x+k)}{x^2+1}=0$$

$x^2+1>0$ より　$(x+1)(kx^2-x+k)=0$ …①

$g(x)=kx^2-x+k$ とおくと

$g(x)=0$ が $x=-1$ 以外の異なる2つの実数解をもてばよい

$g(-1)=0$ のとき $k=-\frac{1}{2}$　$\therefore k\neq-\frac{1}{2}$ …②

$k=0$ のとき $g(x)=0$ は $x=0$ となり不適　$\therefore k\neq0$ …③

$k\neq0$ のとき $g(x)=0$ の判別式を D とおくと $D=1-4k^2$

$D>0$ のとき $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ …④

②,③,④ より 求める k の値の範囲は

$-\frac{1}{2}<k<0$，$0<k<\frac{1}{2}$　（答）

(4) (3)より $D=0$ のとき $k=\pm\frac{1}{2}$．また (1)より $k\neq-\frac{1}{2}$

$k=\frac{1}{2}$ のとき① の解は $x=1$ を重解にもつ

m の方程式は $k=\frac{1}{2}$ のとき $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

①より直線 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ と曲線 $y=f(x)$ は $x=-1,1$ で共有点をもち

$x=1$ で接する

$-1\leqq x\leqq1$ のとき $f(x)\leqq\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$$\therefore S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}\right\}dx$$

まず $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx=-1$

また，$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$ について $x=\tan\theta$ とおくと

x	$-1\longrightarrow1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$$\therefore\int_{-1}^{1}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan\theta-1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta-1)\,d\theta$$

$$=\Big[-\log|\cos\theta|-\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{2}$$

$\therefore S=\frac{\pi}{2}-1$　（答）

6　60点

受験番号		得点 その４	60点	得点合計	250点