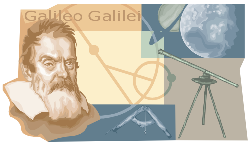
関数3-1 関数 $y=ax^2$　　　学習日　月　日(　)

1　今から400年ほど前，ガリレオ･ガリレイが，物体の自由落下運動について，物体が落下しはじめてからの時間x秒と落下する距離(きょり)y mとの関係について，下の表のように調べました。これについて，次の問いに答えなさい。



（注）実験した場所はイタリアにあるピサの斜塔(しゃとう)ともいわれています。また，重さの異なる物体でも，同じ時間で落下することもわかっています。

x	0	1	2	3	…
y	0	5	20	45	…

（1）上の表に，x^2の欄を追加します。空欄(くうらん)にあてはまる適当な数を入れなさい。

x	0	1	2	3	…
x^2	0	1	4	9	…
y	0	5	20	45	…

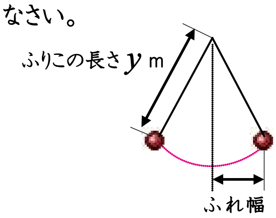
（2）yはx^2を用いて，どのような式で表せるでしょう。下の空欄にあてはまる適当な数を入れなさい。

$y = \boxed{5} \times x^2$

（実際には，$y=4.9\times x^2$です。）

2　ふりこが1往復するのにかかる時間は，おもりの重さやふれ幅には関係なく一定で，それを周期といいます。周期がx秒のふりこの長さをy mとすると，およそ$y=\frac{1}{4}x^2$の関係があります。このとき，次の問いに答えなさい。

（実際には，$y=\frac{9.8}{4\pi^2}x^2$です。）



（1）下の表の空欄にあてはまる適当な数を入れなさい。

x	0	1	2	3	4	5	6	…
x^2	0	1	4	9	16	25	36	…
y	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	…

（2）下の空欄にあてはまる適当な数を入れなさい。

xの値を2倍，3倍，…すると，yの値は，$\boxed{4}$倍，$\boxed{9}$倍，…になる。一般に，xの値をn倍すると，yの値は$\boxed{n^2}$倍になる。

3 次の場合，x，yの関係を式に表しなさい。

（1）1辺の長さがx cmの正方形の面積y cm^2

$y=x^2$

（2）半径がx cmの円の面積y cm^2

$y=\pi x^2$

（3）yはxの2乗に比例し，$x=2$のとき，$y=12$

求める式を$y=ax^2$とおき，$x=2$のとき，$y=12$を代入

$12=a\times 2^2$より，$a=3$

よって，$y=3x^2$

（4）yはxの2乗に比例し，$x=-3$のとき，$y=3$

求める式を$y=ax^2$とおき，$x=-3$のとき，$y=3$を代入

$3=a\times(-3)^2$より，$a=\frac{1}{3}$

よって，$y=\frac{1}{3}x^2$

（5）yはxの2乗に比例し，$x=4$のとき，$y=-32$

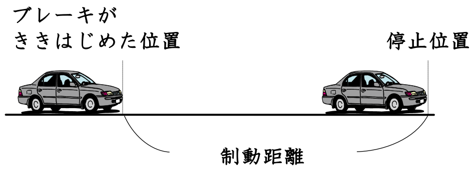
求める式を$y=ax^2$とおき，$x=4$のとき，$y=-32$を代入

$-32=a\times 4^2$より，$a=-2$

よって，$y=-2x^2$

xの2乗に比例
$y=ax^2$（aは比例定数）

4　自動車のブレーキがききはじめてから停止するまでの距離を制動(せいどう)距離といいます。時速x kmで走っているときの制動距離をy mとすると，yはxの2乗に比例することがわかっています。このとき，次の問いに答えなさい。（参考資料：ＪＡＦ）



（1）ある自動車が，時速50kmで走っていたときの制動距離が15mでした。x，yの関係を式に表しなさい。

求める式を$y=ax^2$とおき，$x=50$のとき，$y=15$を代入

$15=a\times 50^2$より，$a=\frac{3}{500}$

よって，$y=\frac{3}{500}x^2$

（2）（1）のとき，同じ自動車が時速100kmで走っていたとすると，制動距離は何mになるでしょう。

$y=\frac{3}{500}x^2$に，$x=100$を代入

$y=\frac{3}{500}\times 100^2=60$

よって，60m

速度が２倍だと制動距離は４倍にもなるね！

実際には，危険(きけん)を察知(さっち)してからブレーキの動作に移るまでに空走(くうそう)距離があるので，停止距離はもっと長くなるよ。「車は急に止まれない」ので，スピードの出し過ぎには注意しようね。

関数3-2 関数 $y=ax^2$ のグラフ　　学習日　　月　　日(　　)

1　関数 $y=x^2$ について，次の問いに答えなさい。

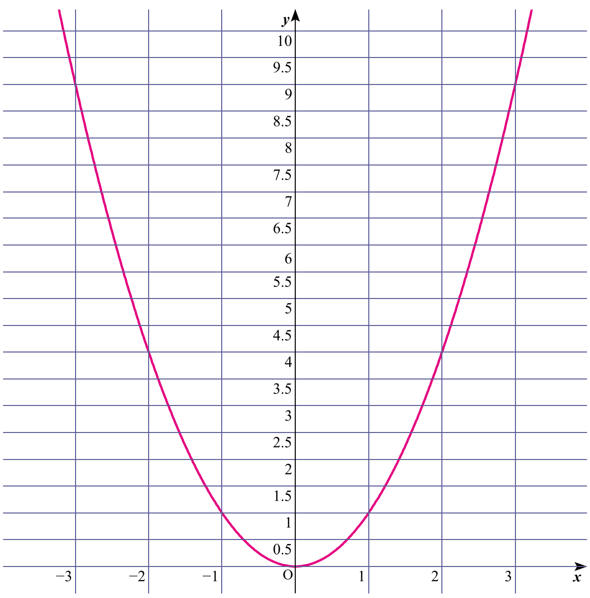
(1)　x の値を－3から3まで，めもりを1ずつにとって，下の表を完成させなさい。

x	…	－3	－2	－1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

(2)　x の値を－1から1まで，めもりを0．2ずつにとって，下の表を完成させなさい。

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	0.64	0.36	0.16	0.04	0	0.04	0.16	0.36	0.64	1

(3)（1）(2)の表をもとにして，関数 $y = x^2$ のグラフを，下の図にかき入れなさい。



2　関数 $y=x^2$ のグラフについて，次の空欄にあてはまる適当な語句や数式を入れなさい。

(1)　関数 $y=x^2$ のグラフは，直線ではなく，なめらかな曲線である。この曲線を特に 放物線 という。

(2)　関数 $y=x^2$ のグラフは， y 軸を対称の軸として線対称である。

(3)　関数 $y=x^2$ のグラフは，原点を通り，x軸の 上 側にある。

(4)　xが増加するとき，

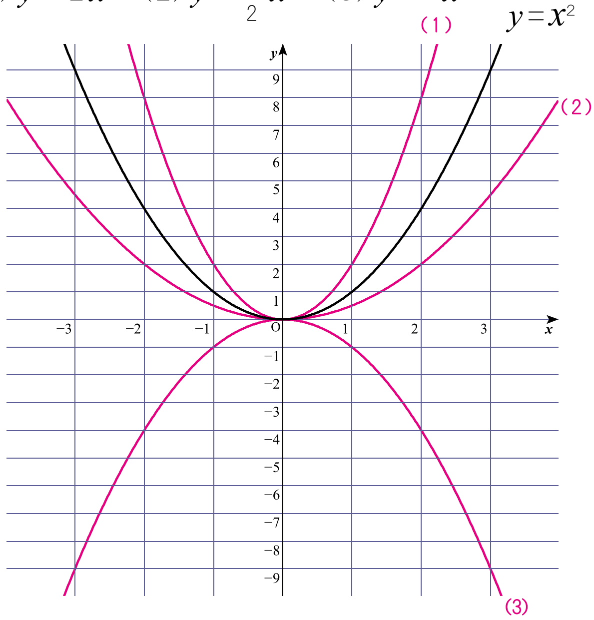
$x<0$の範囲では，y は 減少 し，

$x>0$の範囲では，y は 増加 する。

3　次の関数のグラフを，下の図にかき入れなさい。また，下の表を完成させなさい。

x	…	－3	－2	－1	0	1	2	3	…
x^2	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$2x^2$	…	18	8	2	0	2	8	18	…
$\frac{1}{2}x^2$	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…
$-x^2$	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

(1) $y=2x^2$　(2) $y=\frac{1}{2}x^2$　(3) $y=-x^2$



4　関数 $y = ax^2$ のグラフについて，次の空欄にあてはまる適当な語句や数式を入れなさい。

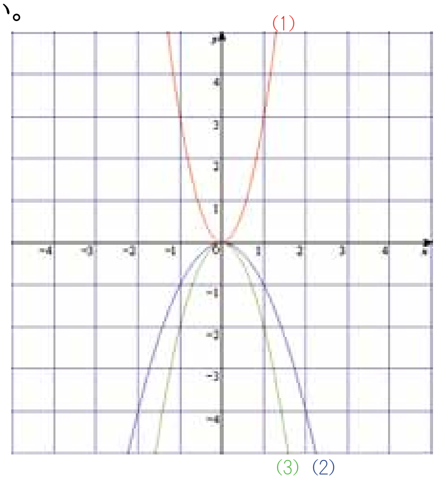
(1)　関数 $y = ax^2$ のグラフは，放物線といい，左右に線対称な図形である。その軸は y 軸で，頂点は 原点 である。

(2)　$a>0$のとき，グラフは x 軸の 上 側にあり，

$a<0$のとき，グラフは x 軸の 下 側にある。

5　下の図のグラフ(1)～(3)の関数を，(ア)～(エ)から選び，記号で答えなさい。

(ア) $y=-x^2$
(イ) $y=3x^2$
(ウ) $y=-2x^2$
(エ) $y=2x^2$



答え

(1)	(イ)
(2)	(ア)
(3)	(ウ)

関数 $y=ax^2$ の値の変化　　　学習日　月　日（　）

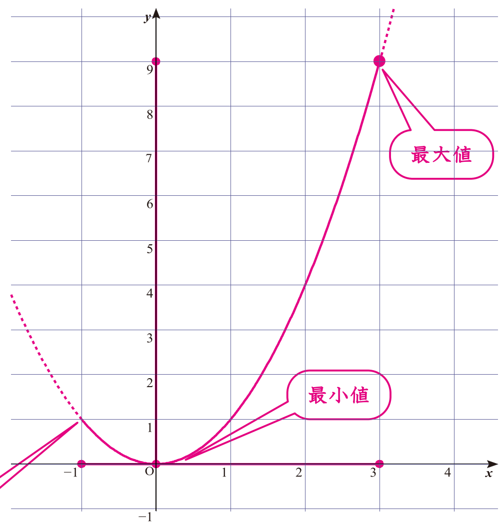
● x の変域に制限があるときの y の変域 ●

1　関数 $y=x^2$（$-1 \leqq x \leqq 3$）について，y の変域を求めたい。次の各問いに答えなさい。

（1）下の表を完成させなさい。

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	4	9

（2）（1）の表をもとにして，グラフを下の図にかき入れなさい。



最小値ではない。端点がすぐ最大・最小ではない。

（3）y の変域を求めなさい。　両端の値でなくグラフで確認！

グラフより，$0 \leqq y \leqq 9$

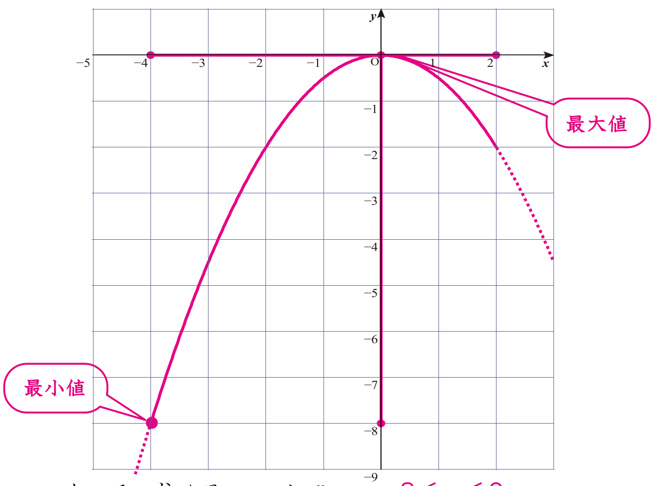
2　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$（$-4 \leqq x \leqq 2$）について，y の変域を求めなさい。

1と同じようにすればいいね！

下の表のように，y の値を求める。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

これをもとにして，グラフをかくと下の図のようになる。



よって，求める y の変域は，$-8 \leqq y \leqq 0$

$$変化の割合 = \frac{y の増加量}{x の増加量}$$

3　関数 $y=x^2$ について，次の問いに答えなさい。

（1）下の表を完成させなさい。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

（2）x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

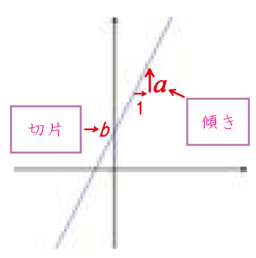
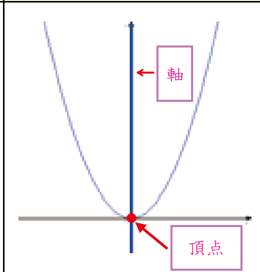
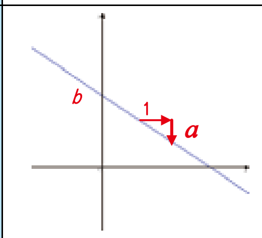
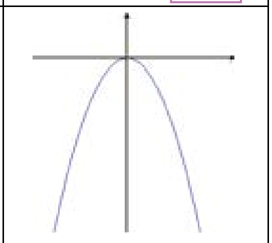
$$変化の割合 = \frac{\boxed{9} - \boxed{1}}{3-1} = \frac{\boxed{8}}{2} = \boxed{4}$$

（3）x の値が -2 から0まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

あれ？値が一定でない！

$$変化の割合 = \frac{0-4}{0-(-2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

4　一次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$ の特徴についてまとめた下の表の，空欄 □ にあてはまる適当な語句をかき入れて，表を完成させなさい。

		一次関数 $y=ax+b$	関数 $y=ax^2$
グラフの形	$a>0$		
	$a<0$		
y の値の増減	$a>0$	常に 増加	x が増加するとき， $x<0$ で y は 減少 し， $x>0$ で y は 増加 する。 $x=0$ のとき，y は 最小 。
	$a<0$	常に 減少	x が増加するとき， $x<0$ で y は 増加 し， $x>0$ で y は 減少 する。 $x=0$ のとき，y は 最大 。
変化の割合		一定で a に等しい。	一定ではない。

関数3-4 関数 $y=ax^2$ の活用　　学習日　月　日(　)

1　物体の自由落下運動について，物体が落下しはじめて x 秒間に落下する距離(きょり)を y m とすると，およそ $y=5x^2$ の関係が成り立ちます。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　落下しはじめて2秒間に落下する距離は，およそ何mでしょう。

$y=5x^2$ に $x=2$ を代入して，$y=5\times2^2=20$　<u>およそ20m</u>

(2)　80mの高さから物体を落下させると，地面に着くまでにおよそ何秒かかりますか。

$y=5x^2$ に $y=80$ を代入して，$80=5x^2$

$x^2=16$ を解いて，$x=\pm4$

x は正の数だから，$x=-4$ は問題にあわない。<u>およそ4秒</u>

(3)　落下しはじめてから1秒と3秒の間の変化の割合を求めなさい。

$$変化の割合=\frac{5\times3^2-5\times1^2}{3-1}=\frac{45-5}{2}=\frac{40}{2}=20$$

したがって，<u>20</u>

(これを1秒と3秒の間の平均の速さといい，20(m/秒)で表す)

(4)　落下しはじめてから1秒と1．1秒の間の変化の割合を求めなさい。

$$変化の割合=\frac{5\times1.1^2-5\times1^2}{1.1-1}=\frac{6.05-5}{0.1}=\frac{1.05}{0.1}=10.5$$

したがって，<u>10．5</u>　(←1秒と1．1秒の間の平均の速さ)

発展　(1秒と1．01秒の間の平均の速さは10．05(m/秒)，…，となり，1秒後の瞬間(しゅんかん)の速さ(高校で習う)は10(m/秒)であるといいます。)

2　ふりこが1往復するのにかかる時間は，おもりの重さやふれ幅には関係なく一定で，それを周期といいます。 周期が x 秒のふりこの長さを y mとすると，およそ $y=\frac{1}{4}x^2$ の関係があります。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 周期が1秒のふりこの長さは，およそ何mでしょう。

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=1$ を代入して，$y=\frac{1}{4}\times1^2=\frac{1}{4}$

<u>およそ $\frac{1}{4}$ (0．25)m</u>

(2) 長さが1mのふりこの周期は，およそ何秒でしょう。

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $y=1$ を代入して，$1=\frac{1}{4}x^2$

$x^2=4$ を解いて，$x=\pm2$

x は正の数だから，$x=-2$ は問題にあわない。<u>およそ2秒</u>

3　交通事故による被害は，車が衝突した際の衝撃力に関係しています。この衝撃力は車の速度の２乗に比例することがわかっています。今，時速 x kmで走っている車がコンクリート壁に衝突した場合の衝撃を，y mの高さから地面に落ちたのと同じくらいの大きさに言い換えるとき，次の問いに答えなさい。(参考資料：ＪＡＦ)

(1) ある車が，時速40kmで走っていてコンクリート壁に衝突した場合の衝撃力が，6mの高さから地面に落ちたのと同じくらいの大きさだとするとき，x，y の関係を式に表しなさい。

求める式を $y=ax^2$ とおき，$x=40$ のとき，$y=6$ を代入

$6=a\times40^2$ より，$1600a=6$

$a=\frac{3}{800}$

したがって，<u>$y=\frac{3}{800}x^2$</u>

スピードの出し過ぎには要注意！

(2) (1)の車が，時速80kmで走っていてコンクリート壁に衝突した場合の衝撃力は，何mの高さから地面に落ちたのと同じくらいの大きさでしょう。

$y=\frac{3}{800}x^2$ に，$x=80$ を代入

$y=\frac{3}{800}\times80^2=\frac{3}{800}\times6400=24$

したがって，<u>24m</u>

x が2倍になると，y は $2^2=4$ 倍にもなるよ！

4　1辺が8cmの正方形ABCDがあります。点Pは点Aを出発して，点Bを通り,点Cまで毎秒2cmの速さで動きます。点Qは点Aを出発して点Dまで毎秒1cmの速さで動きます。2点P，Qが同時に点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm²とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) x の変域を求めなさい。

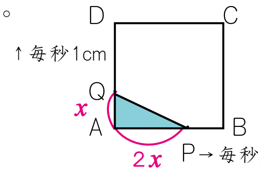
<u>$0\leqq x\leqq8$</u>

(2) x，y の関係を式に表しなさい。

(ア) $\boxed{0}\leqq x\leqq\boxed{4}$ のとき

$y=\frac{1}{2}\times x\times2x=x^2$

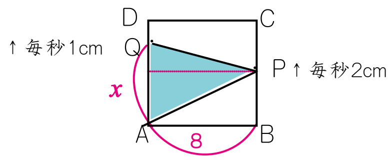
<u>$y=x^2$</u>



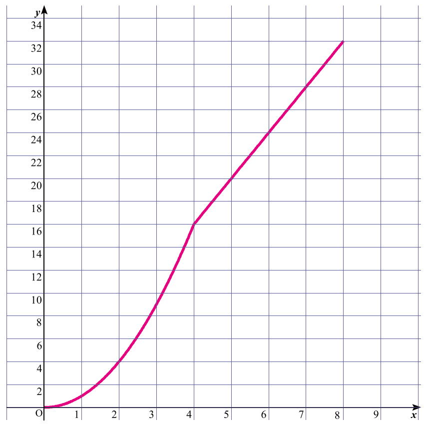
(イ) $\boxed{4}\leqq x\leqq\boxed{8}$ のとき

$y=\frac{1}{2}\times x\times8=4x$

<u>$y=4x$</u>



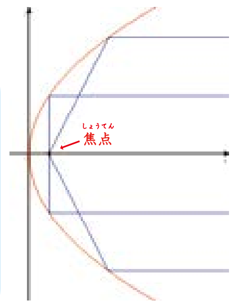
(3) x，y の関係を表すグラフを下の図にかきなさい。



$x=4$ を境目にして，放物線と直線がつながったグラフだね。

トリピーと数学

衛生放送や宇宙からくる電波の受信などに使うパラボラアンテナは，放物線を対称軸のまわりに回転させてできる曲面になっています。(パラボラとは放物線という意味です。)この曲面には，軸に平行に進んできた電波を反射させ，１点に集める性質があります。この点を焦点(しょうてん)といいます。



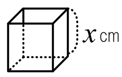
関数 3-4

関数3-5 関数 $y=ax^2$ のまとめ　　学習日　月　日（　）

1　次の場合，x，yの関係を式に表しなさい。

（1）　1辺の長さが x cmの立方体の表面積 y cm²

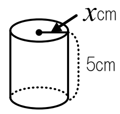
1つの正方形の面積は x^2 で，これが，上下左右前後の6面あるから，　$y=6x^2$ ← 焦点



（2）　底面の半径が x cm，高さが5cmの円柱の体積 y cm³

（体積）＝（底面積）×（高さ）だから，

$y=\pi x^2\times 5$　　つまり，$y=5\pi x^2$



（3）yはxの２乗に比例し，$x=3$のとき，$y=18$

求める式を $y=ax^2$ とおき，$x=3$のとき，$y=18$を代入

$18=a\times 3^2$ より，$9a=18$よって，$a=2$

したがって，$y=2x^2$

（4）y は x の２乗に比例し，$x=2$のとき，$y=-2$

求める式を $y=ax^2$とおき，$x=2$のとき，$y=-2$を代入

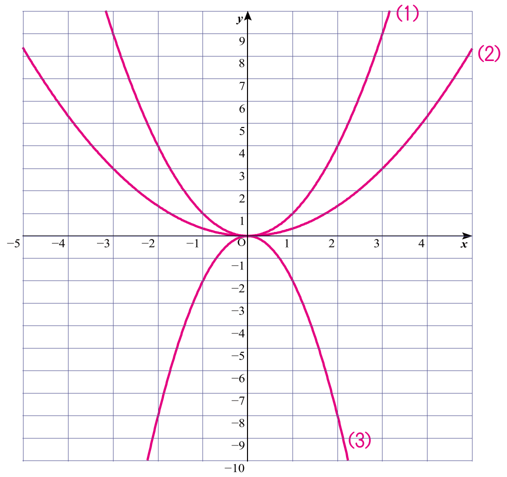
$-2=a\times 2^2$より，$4a=-2$よって，$a=-\frac{1}{2}$

したがって，$y=-\frac{1}{2}x^2$

2　次の関数に関する下の表を完成させなさい。また，そのグラフを，それぞれ，下の図にかき入れなさい。

（1）$y=x^2$　（2）$y=\frac{1}{3}x^2$　（3）$y=-2x^2$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
x^2	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$\frac{1}{3}x^2$	…	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	…
$-2x^2$	…	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	…



3　関数 $y=2x^2$について，x の変域が次のとき，y の変域をそれぞれ求めなさい。

（1）　$1\leqq x\leqq 3$

$x=1$のとき，

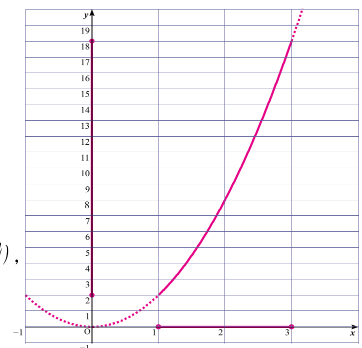
$y=2\times\boxed{1}^2=\boxed{2}$

$x=3$のとき，

$y=2\times 3^2=18$

よって，グラフは右のようになり，求める y の変域は，

$2\leqq y\leqq 18$



（2）　$-2\leqq x\leqq 4$

$x=-2$のとき，

$y=2\times(-2)^2=8$

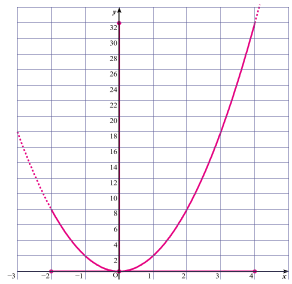
$x=4$のとき，

$y=2\times 4^2=32$

$x=0$のとき，$y=0$

よって，グラフは右のようになり，

求める y の変域は，$0\leqq y\leqq 32$



4　関数 $y=-3x^2$について，xの値が次のように増加するときの変化の割合をそれぞれ求めなさい。

（1）2から4まで

$x=2$のとき，$y=(-3)\times 2^2=-12$

$x=4$のとき，$y=(-3)\times 4^2=-48$

変化の割合＝$\frac{-48-(-12)}{4-2}=\frac{-48+12}{2}=\frac{-36}{2}=-18$

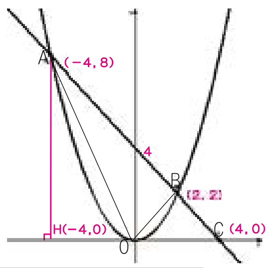
（2）−2から1まで

$x=-2$のとき，$y=(-3)\times(-2)^2=-12$

$x=1$のとき，$y=(-3)\times 1^2=-3$

変化の割合＝$\frac{-3-(-12)}{1-(-2)}=\frac{-3+12}{3}=\frac{9}{3}=3$

5　右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，2点A，Bがあります。点Bの座標を（2，2）とし，2点A，Bを通る直線と x 軸との交点をCとするとき，次の問いに答えなさい。



（1）　a の値を求めなさい。

グラフが点B（2，2）を通るから，

$y=ax^2$ に $x=2$，$y=2$ を代入して，$2=a\times 2^2$より，$4a=2$

これを解いて，$a=\frac{1}{2}$

グラフが点B（2，2）を通るから，$y=ax^2$に$x=2$，$y=2$を代入して…

（2）点Aの x 座標を−4とするとき，y 座標を求めなさい。

$y=\frac{1}{2}x^2$に $x=-4$ を代入して，

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=\frac{1}{2}\times 16=8$

（3）2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

直線の式は一次関数だから $y=ax+b$

A（−4，8），B（2，2）より，

2点A，Bを通る直線の傾きは，$\frac{2-8}{2-(-4)}=\frac{-6}{6}=-1$

求める直線の式を$y=-x+b$とおき，$x=2$，$y=2$を代入して，

$2=-2+b$より，$b=4$　よって，$y=-x+4$

（4）点Cの座標を求めなさい。

2点A，Bを通る直線の式 $y=-x+4$において，$y=0$を代入して，

$0=-x+4$ これを解いて，$x=4$　よって，C（4，0）

（5）△OBCおよび△OABの面積を求めなさい。

△OBC＝$\frac{1}{2}$×（底辺）×（高さ）＝$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

また，点Aから x 軸に垂線AHをひくと，

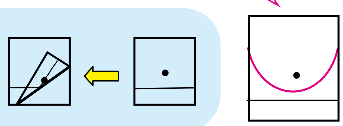
△OAB＝△ACH−△OBC−△OAH＝$\frac{1}{2}\times 8\times 8-4-\frac{1}{2}\times 4\times 8$

＝32−4−16＝12

トリピーと数学

放物線が浮かびあがるよ！

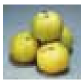
薄い紙の上にかかれた点●を直線に重なるように何度も折り曲げると，どんな図形が浮かびあがるかな？



関数3-6 中学校の関数のまとめ　　　学習日　月　日(　)

1　次の場合，x，y の関係を式に表しなさい。

（1）1個145円の二十世紀梨を x 個買ったときの代金 y 円



$y=145x$　←比例の関係

（2）12kmの道のりを歩く大山登山において，時速3kmで歩いたときの x 時間後の残りの道のり y km

$y=12-3x$　←一次関数

（3）山陰海岸ジオパークウオーク10kmコースを，時速 x kmで y 時間歩いた

$xy=10$より，$y=\frac{10}{x}$　←反比例の関係

（4）直径が x cmのスイカ(球)の表面積 y cm^2

$y=4\pi x^2$←関数 $y=ax^2$

2　次の関数について，下の表をそれぞれ完成させなさい。
また，グラフを下の図にそれぞれかきなさい。

（1）$y=3x$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−9	−6	−3	0	3	6	9	…

（2）$y=-2x+4$

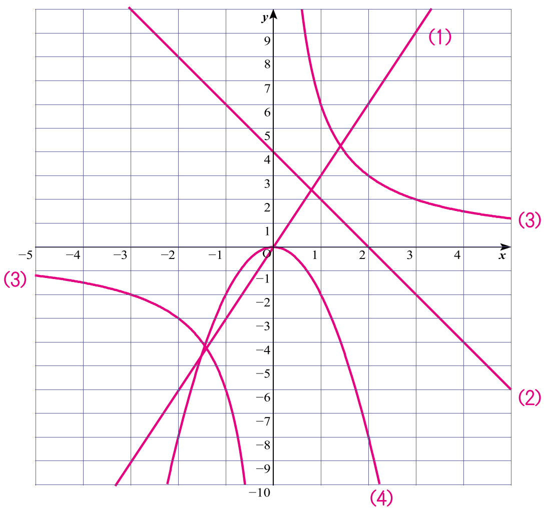
x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	10	8	6	4	2	0	−2	…

（3）$y=\frac{6}{x}$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−2	−3	−6	×	6	3	2	…

（4）$y=-2x^2$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	−18	−8	−2	0	−2	−8	−18	…



3　次の場合，x，yの関係を式に表しなさい。

（1）yはxに比例し，$x=4$のとき，$y=-8$

$y=ax$とおき，$x=4$のとき，$y=-8$を代入すると，
$-8=a\times4$　これを解いて，$a=-2$
よって，$y=-2x$

（2）y は x に反比例し，$x=3$のとき，$y=-4$

$y=\frac{a}{x}$とおき，$x=3$のとき，$y=-4$を代入すると，
$-4=\frac{a}{3}$　これを解いて，$a=-12$
よって，$y=-\frac{12}{x}$

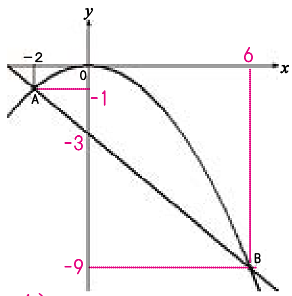
（3）y は x の一次関数で，そのグラフは傾き$\frac{1}{3}$，点(2，−1)を通る直線である

$y=ax+b$とおき，傾きが$\frac{1}{3}$だから，さらに
$y=\frac{1}{3}x+b$として，$x=2$のとき，$y=-1$を代入すると，
$-1=\frac{1}{3}\times2+b$　これを解いて，$b=-\frac{5}{3}$
よって，$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

（4）y は x の2乗に比例し，xの値が−2から3まで増加するときの変化の割合が3である

$y=ax^2$とおき，
変化の割合$=\frac{a\times3^2-a\times(-2)^2}{3-(-2)}=\frac{9a-4a}{3+2}=\frac{5a}{5}=a=3$
よって，$y=3x^2$

4　右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=-x-3$のグラフが，2点A，Bで交わっています。
交点Aのx座標が−2であるとき，次の問いに答えなさい。



（1）点Aの座標を求めなさい。

$y=-x-3$に$x=-2$を代入して，
$y=-(-2)-3=-1$よって，A(−2，−1)

（2）aの値を求めなさい。

$y=ax^2$に$x=-2$のとき，$y=-1$を代入すると，
$-1=a\times(-2)^2$　これを解いて，$a=-\frac{1}{4}$
よって，$y=-\frac{1}{4}x^2$

（3）点Bの座標を求めなさい。

$y=-\frac{1}{4}x^2$と$y=-x-3$を連立して解くと，$-\frac{1}{4}x^2=-x-3$
$x^2-4x-12=0$　$(x+2)(x-6)=0$　$x=-2, 6$
図より，$x>0$だから，$x=6$　　よって，B(6，−9)

トリピーと数学

円錐(えんすい)をその母線(ぼせん)に平行な面で切るとその切り口は**放物線**(ほうぶつせん)になります。また，円錐を底面に垂直な面で切るとその切り口は**双曲線**(そうきょくせん)になります。さらに，円錐を底面に平行な面で切ると，その切り口は**円**(えん)になります。これらをまとめて**円錐曲線**(えんすいきょくせん)（２次曲線）と呼びます。
（注）切り口が**楕円**(だえん)になる場合もあります
（細長い円）